A şaptea Balcaniadă de Matematică de Juniori
Izmir – Turcia – 20-25 iunie 2003

1. Numărul *A* are 2n cifre toate egale cu 4, iar numărul *B* are n cifre, toate egale cu 8. Să se arate că *A*+2*B*+4 este un pătrat perfect, oricare ar fi $n \geq 1$.

2. Într-un plan se află n puncte, oricare trei necoliniare, cu proprietatea că oricum am numerota punctele cu 1, 2, …, n linia frântă ce uneşte punctele 1, 2,…, n (în această ordine) nu se autointersectează. Să se găsească cea mai mare valoare a lui n pentru care există o configuraţie de n puncte cu proprietatea de mai sus.

România (Dinu Şerbănescu)

3. Triunghiul ABC este înscris în cercul K. Fie *D*, *E*, *F* mijloacele arcelor *BC*, *CA*, *AB* care nu conţin punctele *A*, *B*, *C*, respectiv. Segmentul *DE* intersectează *CB* şi *CA* în punctele *G*, respectiv *H*. Segmentul *DF* intersectează *BC* şi *BA* în punctele *I*, respectiv *J*. Notăm cu *M* şi *N* mijloacele segmentelor *GH* şi *IJ*.

a) Aflaţi unghiurile triunghiului *DMN* în funcţie de unghiurile triunghiului *ABC*.

b) Fie *O* centrul cercului circumscris triunghiului *DMN* şi *P* intersecţia dreptelor *AD* şi *EF*. Demonstraţi că punctele *O*, *P*, *M* şi *N* sunt pe acelaşi cerc.

Bulgaria

4. Să se arate că

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2,$$

oricare ar fi numerele reale $x, y, z > -1$.

România (L. Panaitopol)